Capítulo 9

- **9. Análise da estacionaridade**
  - 9.1. Variáveis estacionárias e fracamente dependentes
  - 9.2. Propriedades assintóticas do OLS
  - 9.3. Variáveis altamente persistentes
  - 9.4. Testes de raízes unitárias
  - 9.5. Regressões espúrias

9.1. Variáveis estacionárias e fracamente dependentes

- **Séries estacionárias**
  - Definição intuitiva

  Uma série é estacionária se as características do seu comportamento estatístico e a estrutura de dependência não se modificam com o tempo.

  - Estacionaridade em covariância:

  o processo estocástico $\{y_t : t = 1,2,...,\}$ é estacionário em covariância se

  1) $E(y_t) = \mu$ 2) $Var(y_t) = \sigma_y^2$ 3) $Cov(y_t, y_{t+h}) = f(h)$

  - Dependência fraca:

  o processo estocástico $\{y_t : t = 1,2,...,\}$ é fracamente dependente se,

  $\lim_{h \to \infty} corr(y_t, y_{t+h}) = 0$ de forma suficientemente rápida

  - Observações
    - Uma série pode ser não estacionária mas ser fracamente dependente
    - Estes dois conceitos são necessários para que se possa aplicar a lei dos grandes números e o teorema do limite central

9.1. Variáveis estacionárias e fracamente dependentes

- Exemplos de séries estacionárias e fracamente dependentes
  - Processos MA

MA(1)

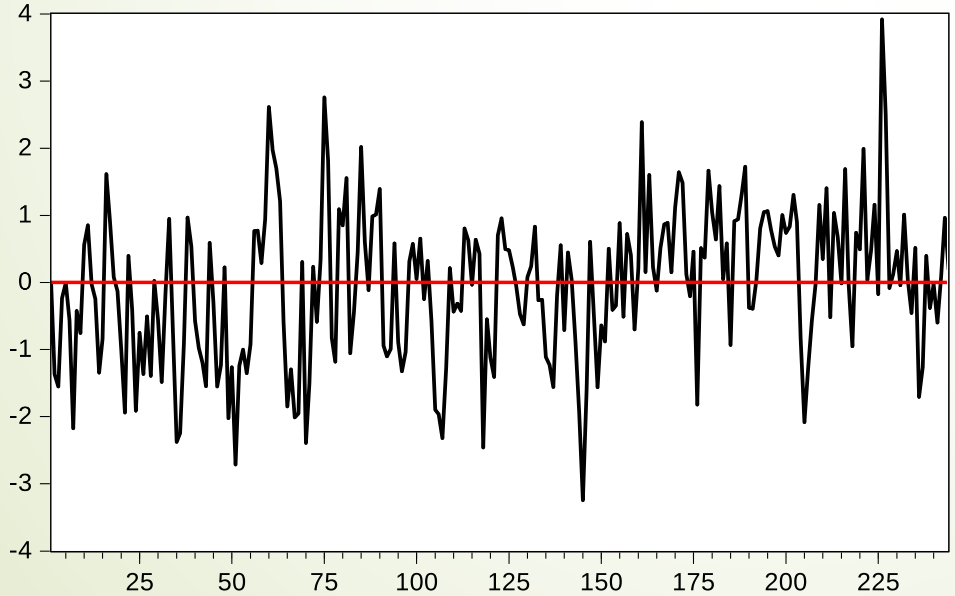
$$y_t = e_t + \alpha e_{t-1}$$

Com e_t um ruído branco (white noise) $\Leftrightarrow$ e_t i.i.d. $(0,\sigma^2)$

  - Processos AR

AR(1)

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + e_t \quad |\rho| < 1 \quad e_t \text{ i.i.d. } (0,\sigma^2)$$



$$y_t = 0.5 y_{t-1} + e_t$$

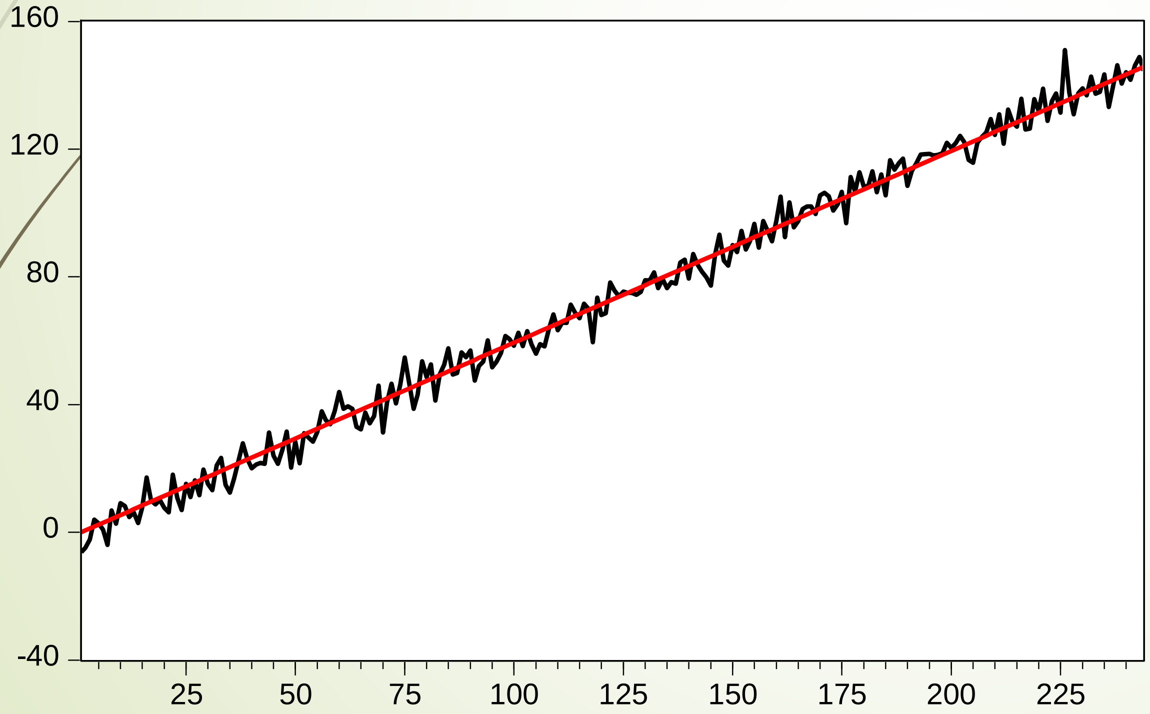
Comportamento de reversão para a média

9.1. Variáveis estacionárias e fracamente dependentes

- Estacionaridade em tendência

o processo estocástico $\{y_t : t = 1, 2, \ldots,\}$ com $y_t = \delta_0 + \delta_1 t + u_t$ é estacionário em tendência se u_t for um processo fracamente dependente.

$$y_t = 0.5 y_{t-1} + 0.6t + e_t$$



Comportamento de reversão para a média (reversão para a tendência)

9.2 Propriedades assintóticas do OLS

- **Hipóteses**

- **ST.1': Modelo linear nos parâmetros**

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \ldots + \beta_k x_{tk} + u_t$$

os processos estocásticos $\{y_t, x_{t1}, \ldots, x_{tk} : t=1,2,\ldots\}$ são **estacionários** e **fracamente dependentes**

- **ST.2': Não existe multicolinearidade perfeita**

Na amostra nenhuma variável explicativa pode ser constante (supondo que existe termo independente) ou ser uma função linear das outras variáveis explicativas

- **ST.3': média condicionada igual a zero – exogeneidade contemporânea**

$$E(u_t \mid \mathbf{x}_t) = 0 \quad \text{com} \quad \mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} 1 & x_{t1} & \ldots & x_{tk} \end{bmatrix}$$

- **Teorema: consistência do OLS:** supondo que se verificam ST1' a ST3' então,

$$\text{plim}\left(\hat{\beta}_j\right) = \beta_j \quad j = 0,1,2,\ldots,k$$

Na realidade para que o OLS seja consistente basta que as variáveis explicativas não sejam contemporaneamente correlacionadas com o erro

9.2 Propriedades assintóticas do OLS

- **Hipótese TS.4': homocedasticidade**

$$Var(u_t \mid \mathbf{x}_t) = Var(u_t) = \sigma^2$$

A variância dos erros num dado momento de tempo não pode depender das variáveis explicativas desse mesmo período e é constante no tempo

- **Hipótese TS.5': ausência de autocorrelação**

$$Cov(u_t, u_s \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_s) = Cov(u_t, u_s) = 0 \quad t \neq s$$

os erros não podem ser correlacionados no tempo condicionado às variáveis explicativas

- **Teorema: Normalidade assintótica**

Sob as hipóteses TS.1' a TS.5' prova-se que o estimador OLS tem uma distribuição assintótica normal,

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se\left(\hat{\beta}_j\right)} \overset{\cdot}{\sim} N\left(0, \sigma^2\right)$$

A inferência habitual (testes t, testes F e intervalos de confiança) é válida assintoticamente.

9.2 Propriedades assintóticas do OLS

Observações

- Se as séries forem estacionárias em tendência (estacionárias em torno da tendência e fracamente dependentes) então verificam a hipótese TS.1' mas deve incluir-se uma tendência entre os regressores.
- A exogeneidade contemporânea garante que o OLS seja consistente mas poderá ser enviesado.
- Em modelos com variável dependente desfasada nos regressores o OLS é enviesado mas poderá ser consistente se $E(u_t \mid y_{t-1}, \mathbf{x}_t) = 0$. Esta condição dificilmente se verifica se houver autocorrelação.
- Para a garantia da consistência é fundamental ter séries estacionárias e fracamente dependentes (ou estacionárias em tendência). Se tal não acontecer, i.e., se as séries forem altamente persistentes, então devem ser transformadas em séries fracamente dependentes e a regressão OLS deve proceder-se sobre as séries transformadas.

9.3. Variáveis altamente persistentes

- **Passeio aleatório**

$$y_t = y_{t-1} + e_t \qquad e_t \text{ i.i.d } N(0,\sigma^2)$$

Pode ser entendido como um processo AR(1) com $\rho = 1 \longrightarrow$ raíz unitária

$$y_t = y_0 + e_1 + e_2 + \ldots + e_t$$

O valor presente da série depende do valor inicial e de todos os choques passados até ao presente; os choques não são amortecidos com o tempo por isso a série é **altamente persistente**

$E(y_t) = E(y_0)$ não depende de t

$Var(y_t) = \sigma^2 t$ depende de t

$$corr(y_t, y_{t+h}) = \sqrt{\frac{t}{t+h}}$$

É também altamente persistente pois a correlação entre as observações tende muito lentamente para zero e depende de t

Não existe comportamento de reversão para a média

9.3. Variáveis altamente persistentes

- **Passeio aleatório com deriva**

É também um processo de <u>raíz unitária</u>

$$y_t = \alpha + y_{t-1} + e_t \quad e_t \text{ i.i.d } N(0,\sigma^2)$$

$$y_t = y_0 + \alpha t + e_1 + e_2 + \ldots + e_t$$

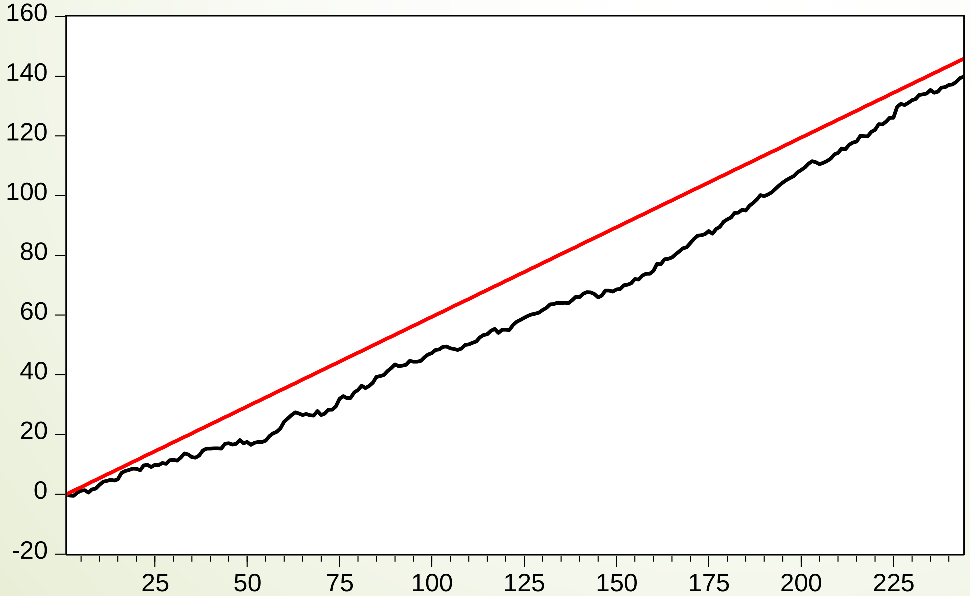
O valor presente da série depende do valor inicial, <u>de uma tendência</u> e de todos os choques passados até ao presente ➡ **altamente persistente**

$$E(y_t) = E(y_0) + \alpha t \quad \text{depende de } t$$

$$Var(y_t) = \sigma^2 t \quad \text{depende de } t$$

$$corr(y_t, y_{t+h}) = \sqrt{\frac{t}{t+h}}$$

É também altamente persistente pois a correlação entre as observações tende muito lentamente para zero e depende de t



Não existe comportamento de reversão para a média

9.3. Variáveis altamente persistentes

- **Transformação de séries altamente persistentes**
  - Motivação:
    $y_t = y_{t-1} + e_t \Leftrightarrow y_t - y_{t-1} = e_t \Leftrightarrow \Delta y_t = e_t$

    y_t é altamente persistente mas Δy_t é estacionária e fracamente dependente
  - Diferenciação : a diferenciação de séries altamente persistentes pode gerar séries estacionárias e fracamente dependentes.
  - Séries integradas

    uma série y_t é integrada de ordem d se for necessário d diferenciações para se obter uma série estacionária e fracamente dependente, integrada de ordem zero, $y_t \sim I(d) \Rightarrow \Delta^d y_t \sim I(0), \Delta^{d-1} y_t \sim I(1), d > 1$
  - Se y_t é um passeio aleatório então $y_t \sim I(1)$ pois $\Delta y_t \sim I(0)$
  - Uma grande parte das variáveis económicas são $I(1)$
  - As variáveis a preços correntes por vezes são $I(2)$

9.4. Testes de raízes unitárias

- **Testes de Dickey-Fuller**
  - **Variáveis sem tendência**

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + e_t$$

- Se $\alpha = 0, \rho = 1$ então y_t é um passeio aleatório ➡ $y_t \sim I(1)$
- Se $|\rho| < 1$ então y_t é AR(1) ➡ $y_t \sim I(0)$
- $H_0 : \rho = 1 \quad H_1 : \rho < 1$
- É mais conveniente transformar o modelo:

$$y_t - y_{t-1} = \alpha + \rho y_{t-1} - y_{t-1} + e_t \qquad \boxed{\Delta y_t = \alpha + \gamma y_{t-1} + e_t \quad \text{com } \gamma = \rho - 1}$$

$$H_0 : \gamma = 0 \, (\rho = 1) \quad H_1 : \gamma < 0 \, (\rho < 1)$$

$$\tau = \frac{\hat{\gamma}}{se(\hat{\gamma})} \sim DF_c$$

sob H_0 a série não é estacionária e fracamente dependente como tal os resultados habituais não são válidos ➡ o rácio t não tem distribuição habitual *t-student*

9.4. Testes de raízes unitárias

- Existência de autocorrelação na equação de teste

- Teste aumentado de Dickey-Fuller

- Procedimento de teste:

1. Escolher um número de desfasamentos suficientemente grande, q
2. Estimar a equação de teste pelo OLS:

$$\Delta y_t = \alpha + \gamma y_{t-1} + \delta_1 \Delta y_{t-1} + \delta_2 \Delta y_{t-2} + \ldots + \delta_q \Delta y_{t-q} + e_t$$

3. Escolher o desfasamento ótimo, p e estimar pelo OLS:

$$\Delta y_t = \alpha + \gamma y_{t-1} + \delta_1 \Delta y_{t-1} + \delta_2 \Delta y_{t-2} + \ldots + \delta_p \Delta y_{t-p} + e_t$$

4. Testar

$$H_0 : \gamma = 0 \left(\rho = 1\right) \quad H_1 : \gamma < 0 \left(\rho < 1\right)$$

$$\tau = \frac{\hat{\gamma}}{se\left(\hat{\gamma}\right)} \sim DF_c$$

rejeitar H_0 ➡ $y_t \sim I(0)$

não rejeitar H_0 ➡ $y_t \sim I(1)$

9.4. Testes de raízes unitárias

- **Séries com tendência**
- Procedimento de teste:

1. Escolher um número de desfasamentos suficientemente grande, q
2. Estimar a equação de teste pelo OLS:

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \gamma y_{t-1} + \delta_1 \Delta y_{t-1} + \delta_2 \Delta y_{t-2} + \ldots + \delta_q \Delta y_{t-q} + e_t$$

3. Escolher o desfasamento ótimo, p e estimar pelo OLS:

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \gamma y_{t-1} + \delta_1 \Delta y_{t-1} + \delta_2 \Delta y_{t-2} + \ldots + \delta_p \Delta y_{t-p} + e_t$$

4. Testar

$$H_0 : \gamma = 0 \left(\rho = 1\right) \quad H_1 : \gamma < 0 \left(\rho < 1\right)$$

$$\tau = \frac{\hat{\gamma}}{se\left(\hat{\gamma}\right)} \sim DF_{ct}$$

rejeitar H_0 ➡ $y_t \sim I(0)$

não rejeitar H_0 ➡ $y_t \sim I(1)$

9.5. Regressões Espúrias

- **Regressão espúria**: regressão com elevado R^2, estatísticas-t que apontam para uma relação estatísticamente significativa entre as variáveis quando na realidade não existe relação causal entre elas.
- Verificou-se em estudos de simulação que regressões OLS com variáveis I(1) independentes podem originar regressões espúrias
- Em estudos empíricos regista-se frequentemente resultados inesperados quando se aplica o OLS com variáveis I(1)
- **Recomendação:** Transformar as variáveis I(1) (ou integradas de ordem superior) em variáveis I(0) antes de as introduzir na regressão com OLS